CHƯƠNG II:

MA TRẬN-ĐỊNH THỨC -HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

I. MA TRẬN

II. ĐỊNH THỨC

III. HẠNG MA TRẬN-MA TRẬN NGHỊCH ĐẢO

IV. HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

$$\begin{bmatrix} \Omega & \alpha & \Phi \\ \varphi & \infty & \varpi \\ \mathbb{N} & \xi & \delta \end{bmatrix}$$

BÀI 1

MA TRẬN

§1: Ma Trận

1.1 Các khái niệm

a) **Định nghĩa:** Ma trận là một bảng gồm m.n số thực (phức) được viết thành m hàng và n cột như sau:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Ký hiệu: $A = [a_{ij}]_{mn}$

§1: Ma Trận

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Hàng thứ nhất

Hàng thứ i

mn: gọi là cấp của ma trận

a_{ij}: Phần tử nằm ở hàng i cột j

Cột thứ 2 Cột thứ j

§1: Ma Trận

Đại Số Tuyến Tính

Ví dụ:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \sqrt{2} \\ -3 & 1.5 & 5 \end{bmatrix}_{23} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 8 & -6 \\ 2 & 9 & 0 \\ 0 & -7 & -2 \end{bmatrix}_{33}$$

a_{21}

đường chéo chính

§1: Ma Trận

b) Các ma trận đặc biệt.

1. Ma trận không: $a_{ij} = 0, \forall i, j.$

(tất cả các phần tử đều = 0)

Ví dụ:

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

§1: Ma Trận

2. *Ma trận vuông:* m = n. (số hàng = số cột)

<u>Đ/n:</u> ***Ma trận vuông n hàng, n cột được gọi là ma trận vuông cấp n.***

Ví dụ:

Ma trận vuông cấp 3

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 & 7 & 8 \\ 4 & -2 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Ma trận vuông cấp 2

§1: Ma Trận

Cho ma trận vuông cấp n $A=[a_{ij}]$ ***. Các phân tử*** a_{ii} ***gọi là các phần tử chéo. Đường thẳng qua các phần tử chéo gọi là đường chéo chính.***

Ví dụ:

$$B=\begin{bmatrix} 2 & 8 & -6 \\ 2 & 9 & 0 \\ 0 & -7 & -2 \end{bmatrix}_{33}$$

đường chéo chính

§1: Ma Trận

3. Ma trận chéo: là ma trận vuông có:

$$a_{ij} = 0, \forall i \neq j.$$

(các phần tử ngoài đường chéo chính = 0)

Ví dụ:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

§1: Ma Trận

4. Ma trận đơn vị: là ma trận chéo có:

$$a_{ii} = 1, \forall i = 1, 2, \ldots, n.$$

Ký hiệu: E, E_n (hoặc I, $I_{n)}$.

Ví dụ:

$$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, E_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ .. & .. & \ldots & .. \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}$$

§1: Ma Trận

5. Ma trận tam giác: là ma trận vuông có

$$a_{ij} = 0, \forall i > j. \quad \text{(tam giác trên)}$$

$$a_{ij} = 0, \forall i < j. \quad \text{(tam giác dưới)}$$

Ví dụ:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 2 & 0 \\ 2 & 9 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

MT tam giác trên — MT tam giác dưới

§1: Ma Trận

6. Ma trận cột: là ma trận có $n=1$.

Ma trận cột có dạng:

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ .. \\ a_{m1} \end{bmatrix} := [a_i]_m$$

7. Ma trận hàng: là ma trận có $m=1$.

Ma trận hàng có dạng: $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{bmatrix}$

§1: Ma Trận

8. Ma trận chuyển vị: cho ma trận $A=[a_{ij}]_{mn}$, ma trận chuyển vị của ma trận A ký hiệu: A^T và xác định $A^T=[b_{ij}]_{nm}$ với $b_{ij}=a_{ji}$ với mọi i,j.

(chuyển hàng thành cột, cột thành hàng)

Ví dụ:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 5\\ 6 & 7 & 9\end{bmatrix} \to A^T=\begin{bmatrix}1 & 6\\ 2 & 7\\ 5 & 9\end{bmatrix}$$

NX: $\boxed{(A^T)^T = A}$

§1: Ma Trận

1.2. *Ma trận bằng nhau:*

$$A = \left[a_{\text{ij}}\right]_{m\times n} = \left[b_{\text{ij}}\right]_{m\times n} = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}, \forall i, j.$$

VD

$$\begin{bmatrix} \mathrm{a} & 1 & -2 \\ 9 & \mathrm{b} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & \mathrm{y} \\ \mathrm{x} & 3 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{a} = -1 \\ \mathrm{b} = 3 \\ \mathrm{x} = 9 \\ \mathrm{y} = -2 \end{cases}$$

Chú ý: Chỉ xét 2 ma trận bằng nhau nếu chúng cùng cỡ.

1.3. Các phép toán trên ma trận:

a. Phép cộng hai ma trận: ***(cùng cỡ)***

$$\left[a_{ij}\right]_{mn}+\left[b_{ij}\right]_{mn}=\left[a_{ij}+b_{ij}\right]_{mn}$$

(cộng theo từng vị trí tương ứng)

Ví dụ:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

§1: Ma Trận

Bài tập: Tính

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 1 & 4 & 6 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -1 & 7 & 2 \\ -6 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 7 & -1 \\ 0 & 11 & 8 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

§1: Ma Trận

Các tính chất: Giả sử A, B, C, θ là các ma trận cùng cấp, khi đó:

$i)\ A + B = B + A$

$ii)\ A + \theta = A$

$iii)\ A + (B + C) = (A + B) + C$

1.3. Các phép toán trên ma trận:

b. Phép nhân một số với một ma trận:

$$\lambda\left[a_{ij}\right]_{mn} = \left[\lambda.a_{ij}\right]_{mn}, \lambda \in \mathbb{R}$$

(các phần tử của ma trận đều được nhân cho λ)

Ví dụ:

$$2\begin{bmatrix} \mathbf{3} & -2 & 0 \\ 7 & 4 & 5 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & 0 \\ 14 & 8 & 10 \\ 0 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

§1: Ma Trận

Bài tập: Tính

$$3\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 0 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & -9 \\ 12 & 0 \\ 15 & -3 \end{bmatrix}$$

§1: Ma Trận

Các tính chất: $\forall\alpha,\beta\in R,\forall A,B$ là hai ma trận cùng cấp, khi đó

$$i)\ \alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$$

$$ii)\ (\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$$

$$iii)\ \alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A$$

$$iv)\ 1A=A$$

§1: Ma Trận

- Chú ý: $A - B = A + (-1)B$
- Nhận xét: trừ 2 ma trận là trừ theo vị trí tương ứng

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

§1: Ma Trận

Đại Số Tuyến Tính

Bài tập: Tính

2+(-2).1=0

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 7 & -1 \end{bmatrix}$$

§1: Ma Trận

1.3 Các phép toán trên ma trận:

c. Phép nhân hai ma trận: Cho hai ma trận $A_{mp}; B_{pn}$,

Khi đó ma trận $A_{mp}B_{pn} = [c_{ij}]_{mn}$ gọi là tích của hai ma trận *A, B*. Trong đó:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ip}b_{pj}, \forall i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n}.$$

$a_{i1} \quad a_{i2} \quad a_{ip}$ → Hàng thứ *i* của ma trận *A*.

$b_{1j} \quad b_{2j} \quad b_{pj}$ → Cột thứ *j* của ma trận *B*.

Như vậy c_{ij} = hàng thứ *i* của ma trận *A* nhân tương ứng với cột thứ *j* của ma trận *B* rồi cộng lại.

§1: Ma Trận

Ví dụ: Nhân hai ma trận sau:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}_{33} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}_{32} = \begin{bmatrix} & \\ & \\ & \end{bmatrix}_{32}$$

số cột của A = số hàng của B

Chú ý: hàng 1 nhân cột 2 viết vào vị trí c_{12}

§1: Ma Trận

Ví dụ: Nhân hai ma trận sau:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}_{33} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}_{32} = \begin{bmatrix} 13 & 5 \\ & \\ & -4 \end{bmatrix}_{32}$$

§1: Ma Trận

Ví dụ: Tính

Cột 1

Hàng 1 =

$$\begin{bmatrix}1 & 4 & 2\\ -1 & 0 & 4\end{bmatrix}_{23}\begin{bmatrix}2 & 4 & 1\\ 2 & -3 & 0\\ 3 & 5 & 1\end{bmatrix}_{33}=\begin{bmatrix}16 & 2 & 3\\ 10 & 16 & 3\end{bmatrix}_{23}$$

§1: Ma Trận

- **Bài tập:** Tính

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & 2 \\ 5 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}$$

§1: Ma Trận

- **Chú ý:**

  - Muốn nhân A với B thì ***số cột của A = số hàng của B.***

  Do đó, việc tồn tại AB không suy ra được việc tồn tại BA.

  -Nói chung $AB \neq BA$

Ví dụ:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & -1 \\ 23 & -5 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 10 \\ 4 & 16 \end{bmatrix}$$

§1: Ma Trận

Các tính chất: Ta giả sử các ma trận có cấp phù hợp để tồn tại ma trận tích

$i)\ A(BC) = (AB)C$

$ii)\ A(B+C) = AB + AC$

$iii)\ (A+B)C = AC + BC$

$iv)\ AE = EA = A$ (E là MT đơn vị)

§1: Ma Trận

- **Ví dụ:**

$$AE = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 8 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 8 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} = A$$

$$EA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 8 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 8 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} = A$$

§1: Ma Trận

Chú ý:

- Nếu A, B là các ma trân vuông cấp n thì AB và BA tồn tại và cũng là ma trận vuông cấp n.
- Kí hiệu: $A^m = A.A\ldots A$ (m ma trận A)
- ***Đa thức của ma trận:***

Cho đa thức $P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$

và ma trận vuông $A = [a_{ij}]_n$

Khi đó:

$$P_n(A) = a_0 A^n + a_1 A^{n-1} + \ldots + a_n E_n$$

§1: Ma Trận

- **Bài tập:** Cho $f(x) = x^2 + 3x - 4$

và ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Tính f(A) =?

§1: Ma Trận

$$f(A) = A^2 + 3A - 4I_3$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 14 & 26 \\ 0 & 14 & 32 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

§1: Ma Trận

1.4 Các phép biến đổi sơ cấp trên ma trận:

1. Nhân một số khác không với một hàng (cột) của ma trận. Ký hiệu: $A \xrightarrow{\lambda h_i \;\; (\lambda c_i)} B$
2. Đổi chỗ hai hàng (cột) của ma trận. Ký hiệu: $A \xrightarrow{h_i \leftrightarrow h_j \;\; (c_i \leftrightarrow c_j)} B$
3. Cộng vào một hàng (cột) với một hàng (cột) khác đã nhân thêm một số khác không. Ký hiệu: $A \xrightarrow{h_i + \lambda h_j \;\; (c_i + \lambda c_j)} B$

§1: Ma Trận

- **Ví dụ:** Đưa ma trận sau về dạng ma trận hình thang.

-5=-1+(-2)2

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ -4 & 5 & 2 & -1 \\ -1 & 7 & 3 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{h_3+4h_1 \\ h_4+1h_1}]{h_2+(-2)h_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 3 \\ 0 & 9 & 10 & -1 \\ 0 & 8 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

- Ta làm cho phần dưới đường chéo chính = 0.
- Ta lặp lại như trên cho phần ma trận này

§1: Ma Trận

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ -4 & 5 & 2 & -1 \\ -1 & 7 & 3 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{h_3+4h_1 \\ h_4+1h_1}]{h_2+(-2)h_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 3 \\ 0 & 9 & 10 & -1 \\ 0 & 8 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[h_4+8h_2]{h_3+9h_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & -35 & 26 \\ 0 & 0 & -35 & 26 \end{bmatrix} \xrightarrow{h_4+(-1)h_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & -35 & 26 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

§1: Ma Trận

Đại Số Tuyến Tính

- **Ví dụ:** Đưa ma trận sau về dạng ma trận hình thang:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{h_1 \leftrightarrow h_2} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{2h_3 + (-3)h_1}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{2h_3 + 3h_2} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

§1: Ma Trận

- **Bài tập**: Đưa ma trận sau về dạng ma trận hình thang:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 5 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 5 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{h_3 - 4h_1 \\ h_4 + 3h_1}]{h_2 - 2h_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & -7 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & 2 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow[h_4 + 6h_2]{h_3 - 7h_2}$$

§1: Ma Trận

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -8 & -35 \\ 0 & 0 & 14 & 37 \end{bmatrix} \xrightarrow{8h_4 + 14h_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -8 & -35 \\ 0 & 0 & 0 & -194 \end{bmatrix}$$

MỘT SỐ ĐỀ THI

Câu 1. Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ và đa thức $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$

Tính $f(A)$. Tìm ma trận X thỏa mãn $(5A^2 - A^3)X = A^t$

(Đề 1- K55)

Câu 2. Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$ và đa thức $f(x) = x^2 - 8x + 1$

Tính $f(A)$. Tìm ma trận Y thỏa mãn $Y(8A^2 - A^3) = A^t$

(Đề 2- K55)

Câu 3. (6/2014) Tìm ma trận X thỏa mãn

$$\text{(i)} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{(ii)} \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$